



TITLE:

純電子プラズマ中の渦結晶構造形成 (オイラー方程式の数理解析: 渦運動150年)

AUTHOR(S):

三瓶, 明希夫; 伊藤, 清一; 曾我, 之泰; 青木, 順; 際本, 泰士

CITATION:

三瓶, 明希夫 ...[et al]. 純電子プラズマ中の渦結晶構造形成 (オイラー方程式の数理解析: 渦運動150年). 数理解析研究所講究録 2009, 1642: 109-120

ISSUE DATE:

2009-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140601>

RIGHT:

純電子プラズマ中の渦結晶構造形成

京都工芸繊維大学工芸科学研究科 三瓶明希夫 (Akio Sanpei)
Department of Electronics,
Kyoto Institute of Technology

京都大学人間・環境学研究科 伊藤清一, 曾我之泰, 青木順, 際本泰士
(Kiyokazu Ito, Yukihiro Soga, Jun Aoki, Yasuhito Kiwamoto)
Graduate School of Human and Environmental Studies
Kyoto University

1 非中性プラズマと渦運動

1.1 非中性プラズマと渦運動

非中性プラズマとは, 典型的には正か負どちらか片方の電荷を持つ粒子で構成された粒子群を指す. 非中性プラズマの特徴としては, 粒子の閉じ込め時間が中性プラズマに比較して圧倒的に長いことが上げられる. 閉じ込め時間が数日に及ぶ長時間の粒子捕捉も実現され, 荷電粒子を捕捉状態で長距離輸送することも可能となっている. 非中性プラズマでは Coulomb 力が反対の電荷で遮蔽されないため, 相互作用が長距離まで及ぶのも特徴の一つである. 一方で粒子間の Coulomb 衝突は極めて少ないので, 衝突による散逸は弱く, 散逸的な緩和過程はゆっくりと進行する. 従って, 非中性プラズマでは粒子緩和時間よりも遥かに短い時間から, 数桁長い時間までの広い時間帯に渡る物理現象を追跡することが可能である. また, 反対電荷との再結合が無いので低エネルギー状態で系を生成, 維持することが可能であり, 制御性, 再現性が非常に高いなど実験面でも優れた利点を持つ.

単一極性の電子やイオンのみの集団は粒子間の Coulomb 力で発散してしまうので, 非中性プラズマを捕捉しておくためには外部から電磁場を印加する必要がある. このような単一電荷の集団を非中性プラズマと特定しての研究はカリフォルニア大学サンディエゴ校 (UCSD) において 1970 年代中ごろに始まった. 現在までに, 非中性プラズマについて様々な研究が行われており [1], 非中性プラズマ特有の diocotron 振動においては, 内部密度分布に関連する時間発展, プラズマの形状効果, 振動に伴う異常輸送, 破壊に至る過程など詳しく調べられている. 中性プラズマで既に検証された波動についても, 非中性プラズマは固有振動が明瞭に発現するので, 再度詳しく研究されている. 回転楕円形のプラズマの静電モード [2] や Trivelpiece-Gould モード [3] に関して, 分散関係, モード間遷移, 非線形ヒステリシスが調べられた. この Trivelpiece-Gould モードを利用して, 非理想的過程での角運動量の損失を, 外部より制御されたトルクを与えることにより補う "Rotating Wall" と呼ばれる技術が開発されており, イオンあるいは電子プラズマを数週間もの長時間にわたり閉じ込めることを可能とした [4]. また, 低温状態や熱平衡状態も実現できることからイオンのレーザー冷却による結晶構造の相転移などが調べられている [5]. 陽電子とイオンの混合プラズマや電子と反陽子の混合プラズマ, 及びそれぞれ単独のプラズマの生成・閉じこめ等も行われている [6].

さらに, 筒状の Malmberg trap に閉じこめられた電子プラズマの流れと, 二次元 Euler 流体が等価である事に基づき, 渦, 流体不安定性, 乱流などの実験と理論的研究が行われてきた. ここで, 一様磁場により捕捉された非中性プラズマの運動を考える. 強く磁化された非中性プラズマの密度分布が磁場方向に一様であれば, 磁場に垂直な断面内での運動は, 巨視的には二次元の非圧縮性, 非粘性流体 (二次元 Euler 流体) と等価になる [7, 8]. このとき, (x, y) を磁場に垂直な座

標であるとする。電子密度 $n(x, y)$ と渦度 $\zeta(x, y)$ 、ポテンシャル $\phi(x, y)$ と流線 $\psi(x, y)$ 、粒子数 N と循環 Γ が対応する。この関係を用いると、二次元 Euler 流体の渦運動と非中性プラズマの巨視的な運動を対応させることが可能となる。本実験はこの等価性に基礎を置いている。 z 軸方向を向く一様磁場 B によって個々の電子の運動を磁力線まわりの円軌道に拘束し、 z 方向の両端には負の減速電位で障壁を作ると、電子プラズマは円柱分布を作り、磁力線に沿って反射運動を行う。電場 $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$ は電子の分布によって生じる。今、軸方向の bounce frequency が方位角方向の回転周波数に比べて大きいプラズマを仮定する。電子のサイクロトロン運動の中心は電場と磁場に垂直な方向へドリフトする。このドリフト速度は

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \quad (1)$$

で与えられる。この運動は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトと呼ばれる [9]。ラーマ半径が密度分布のスケールより十分小さいならば、電子の位置はサイクロトロン運動の中心で置き換えられる（案内中心近似）。低い周波数の集団現象（例えば diocotron mode, 乱流, 渦）は bounce-average された $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトダイナミクスで近似的に記述できる。案内中心近似に注目すると非中性プラズマの運動は、非粘性、非圧縮性の理想流体として振る舞う。導体壁は境界条件 $E_\theta(R_W, \theta) = \partial\phi/\partial\theta|_{R_W} = 0$ を与える。壁では、接線方向の速度 $v_\theta(R_W, \theta) \propto \partial\phi/\partial r$ は有限であり、 θ 方向の力がないので、free-slip な境界条件を与える。

様々な流体において、渦は非常に安定した構造として観測される [10]。我々の身の回りにも、様々な形で渦が存在する。銀河スパイラルや降着円盤のジェットは巨大な渦構造を形成している。木星の大赤斑や地球の台風も大きな大気の渦であり、渦潮や竜巻といった渦は古くから我々の生活に影響を与えてきた。近年においては、超流動ヘリウム中の量子化された渦糸の格子形成が観測された。第 II 種超伝導体に侵入した磁束も渦糸の二次元格子を作ることが知られており、渦糸の移動を抑制することがエネルギーの散逸を防ぐために重要であるとされている。

中性流体の渦については、150 年に及ぶ研究の歴史があり、豊富な知識が蓄積されている [11, 12, 13]。理想流体 (Euler 流体) の渦運動は、最も広く研究されてきたものの一つである。しかし、実際の流体を用いての、理想状態の実験システムの成達は困難である。主要な原因は、個々の衝突で相互作用する粒子の中性流体固有の散逸過程にある。その為、殆どの研究が理論的な研究に限られており、数学的な記述の形式に留まっている。それに対して、非中性プラズマは、粒子のダイナミクスが平均電場によるものなので、ほぼ散逸がない。更に、計測面においても利点がある。磁気面に垂直な平面内の二次元密度分布は、可視化技術を用いる事で、詳細に計測する事ができる。それゆえ、等価関係に基づいて、中性流体の渦運動の本質的な要素を、非中性プラズマを用いて実験的に研究できる。この際、速度の回転微分で与えられ本来はベクトルである渦度を密度というスカラー量として直接的に観測できるのも非常に大きな利点である。

これらの等価関係を利用して、強く磁化された純電子プラズマを用いて、渦運動の本質的な特性が実験的に検証されている。滑らかな円筒壁に囲まれた離散的な渦糸群の運動は力学的な運動方程式で表されることがよく知られており [14]、真空中の渦糸のハミルトニアン性が確認されている [15, 16, 17]。また外部から電氣的にシアを印加し、渦糸の変形と安定性に注目した実験も存在する [18]。真空中の 2 本の離散的な渦糸の合体過程については広く研究されてきた課題であり [15, 19, 20]、そこに薄い背景渦度が加わると、渦糸は急速に合体するか、近接した渦対を形成する [17, 21]。背景渦中の渦糸の発展の素過程としては、渦糸が背景渦度の勾配を登る現象の実験的観測と [22]、その現象についての理論的な予測がある [23, 24]。背景渦度分布中に誘起される構造の一つとして、渦度の低い領域 (vorticity hole) のダイナミクスについての研究 [23, 24, 25] も行われてきた。

1.2 非中性プラズマ中の渦結晶構造

本稿では、二次元渦運動の緩和過程で最も興味深い現象の一つである、渦結晶の実験的研究について報告する。図 1 は Hollow 状の渦度分布からの渦結晶形成を表す。渦パッチが不安定な初期条件から生じ、高レイノルズ数二次元乱流へと発展する [26]。比較的強度の高い数本の渦糸が生き残り、準定常な結晶構造を形成する。($t = 140 \sim 5000 \mu\text{sec}$) 同一符号の渦度パッチの二次元乱流の自由緩和についての数値的な研究において、構造が自発的に形成される事が観測されている [26, 27, 28, 29]。強く磁化された純電子プラズマを用いて、不安定な初期分布から渦結晶が形成される過程の実現は、Fine らによって初めて行われた [30]。Hollow 状の渦度分布からの渦結晶形成過程については、実験 [31] 及び数値計算 [32] において、詳細な検討が為されている。

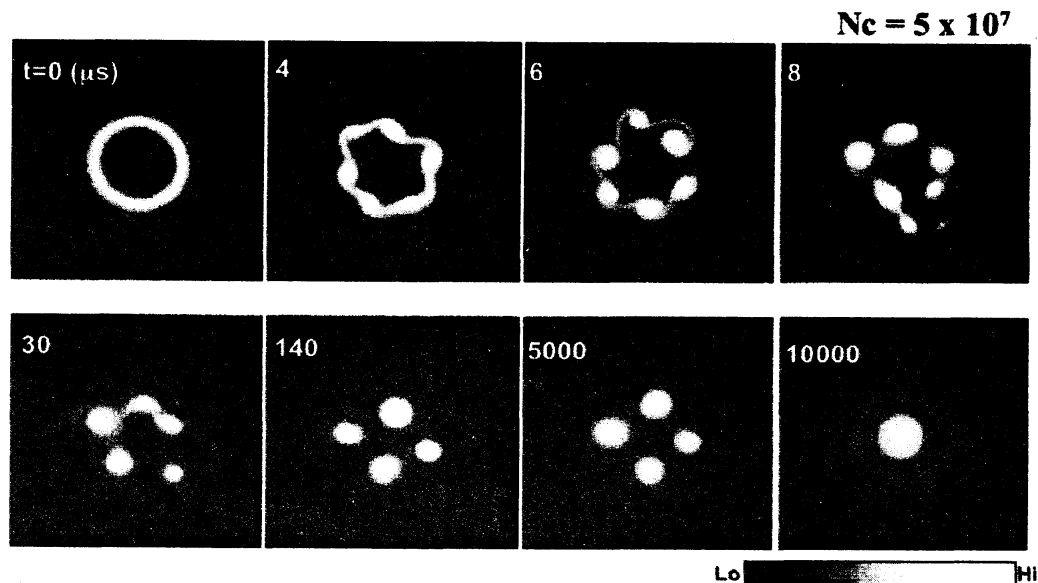


図 1: Hollow 状の渦度分布からの渦結晶形成

これらの渦結晶構造の形成機構を統一的に理解しようという試みは幾つか存在し、相互作用する渦糸のダイナミクスは二次元乱流の理論・計算研究の主題の一つとなっている [33, 34, 35]。selective decay の考えから、保存性の強い保存量に比べ、弱い保存量は選択的に極値をとるとして、変分原理によって構造形成を統一的に理解しようという試みがなされてきた。Punctuated Scale Theory [28] はエネルギーと最大渦度を保存した状態で、ハミルトニアンで記述できる強い渦糸同士の合体によって数が減るという状態を仮定し、渦糸の数が $t^{-\epsilon}$ に比例して減るという結果を導いた。この予測は発展の初期では良く合うが、準平衡近くでは合わなくなる。Global Maximum Entropy Theory [36] は、諸積分量を保存させ、系全体のエントロピーを最大にする事で、準平衡での渦糸のパターンを再現しようとしたが、強い渦が生き残らず、滑らかな分布になってしまった。そこで、Jin and Dubin による Regional Maximum Entropy Theory (RMET) [37] は、渦糸のエントロピーが保存されて、背景渦のエントロピーが最大となるという拘束条件を入れる事で、観測された結晶パターンを上手く再現したが、現象の統一的理解には至っていない。

結晶構造への渦緩和過程における、強い渦パッチ (渦糸) と渦糸の周りの空間を満たす低レベル渦度の相互作用の重要な役割は、実験的には Fine *et al.* [30] に、つづいてシミュレーション研究では Schecter *et al.* [38] によって、初めて明らかにされた。さらに、観測された結晶パターンを上手く再現した統計モデル (RMET) では、背景渦が渦糸の結晶化に必要であるとされた [37]。

本稿では、結晶構造形成に向かう渦糸緩和過程への背景渦の寄与について述べる。結晶構造形成における背景渦度分布 (Background vorticity distribution: BGVD) の寄与を詳しく調べる為、二次元結晶構造の単位セルを形成する最小要素である三本の渦糸のダイナミクスに焦点を当てる。

先行研究 [30] との主要な違いは、背景渦の初期分布の形とレベルを、渦糸の入射前に準備する事でコントロールしている事である。入射する渦糸の循環と位置も高い再現性で制御されている。背景渦と渦糸を制御し、そこから得られるデータを細密に検討することで、結晶化における背景渦度の役割を明らかにする。

2 実験方法

本稿の実験データは Malmberg Trap [39] 中に閉じこめられた電子プラズマを用いて得られる。本実験に用いた実験装置の概略図を図 2 に示す。実験は円筒形の導体壁に囲まれた真空の空間に電子ビームを導入し、これを半径方向には磁場で軸方向には静電場で閉じ込めることにより行なう。電子プラズマを閉じ込める真空容器は直径 64mm、長さ 356mm の円筒形であり、その中心軸が磁気軸と一致するように設置されている。真空容器には半径 32mm、長さ 22mm のアルミ製の円筒電極 11 個が、2mm の間隔を持って設置されている。さらに軸方向の閉じ込めを行う為に、長さ 54mm の円筒電極を両端に取り付け、-80V の電位をかけてある。それぞれの電極は互いに絶縁されており、印加電圧を独立に制御することが可能である。これにより、様々なポテンシャル配位を形成することが出来る [40]。本研究では電子密度の軸方向分布の一様性を確保するため、11 個の円筒電極はすべて接地してプラグ電極にのみ負のバイアス電圧を印加した Malmberg 型の配位で実験を行なう [39]。

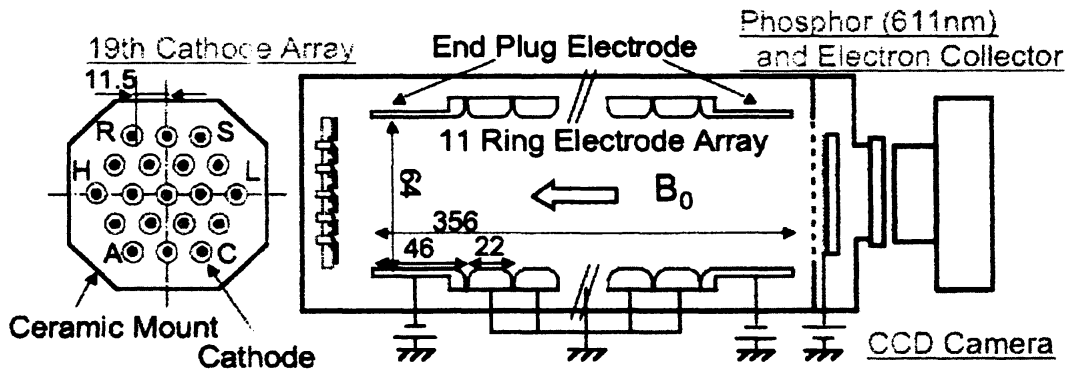


図 2: 右は実験装置模式図。左はカソードアレイ配置図を表す。

真空容器の一端 (図 2 模式図左端) には、電子を放出するための電子ビーム源としてカソードを 19 個並べてある。図 2 左に示すように、電子源には 19 個のカソードが間隔 11mm の三角格子状に配置されている。それぞれのカソードから一度に放出される電子数は、個々にかかる電圧を独立に操作することで、 $\sim 10^7$ 個程度の値から任意に選択する事が可能である。このことを利用して様々な放出分布のパターンを作ることができる。

実験装置は、入射-保持-抽出のサイクルで動作する。カソードから放出された電子を閉じ込め領域に導入するためには、閉じ込めのためのポテンシャル障壁を消す必要がある。図 2 は電極の配置を模式的に示している。通常時は、閉じこめポテンシャル $V = -80V$ が両端のシリンダーに印可されている。瞬間的に入射側の電位障壁を浅くし、同時にカソード電位をそれより深く下げて、カソードから放出される電子を磁力線に沿って閉じ込め領域へと導入する。この操作はだいたい数 μs 程度の時間で行う。電位障壁を元に戻すと、電子柱の両端は電位的に押返されるため、宙に浮いた状態になり、外部から課された静的な電磁場の中で孤立して電子間の相互作用が進展することになる。

ここで導入された電子柱は、二次元渦運動に注目すると、マクロには渦糸として動作する。電子密度分布 n の $1/e$ 半径が 0.3mm 程度長さ L が 220mm 程度、1 本の渦糸に含まれる電子数 N_0

が 10^7 程度の渦糸を最大 19 本まで初期条件として形成する事が可能である。個々の渦糸の初期特性は外部から電氣的に設定可能である。

背景渦は複数の渦糸を混合し、緩和することで生成する。渦糸が混合して連続的な空間分布を形成するまでの時間は、初期分布に依存するが、1-10ms である。抽出無しに渦糸の入射と保持のサイクルを繰返して、合計 1000 本程度の渦糸を混合すると、おおよそ 1 秒ほどで中心軸上で最大密度を持ち有限の広がりを持つ安定な密度分布が形成される。初期入射パルス数及び使用するカソード、緩和時間等を変えることにより、密度分布を変化させることが可能である。ここで電位障壁を瞬間的に浅くすると、中心部の電子が流出してへこんだ形の密度分布を作ることにもできる。背景渦の総電子数 N_b は最大で $\sim 10^9$ 程度であるが、密度は低く渦糸の 10-100 分の 1 程度である。このように色々な形の連続渦度分布を生成した後、改めてその中に渦糸を追加して、背景渦の中の渦糸の運動として追跡する。

本実験では、計測の際にプラズマを排出することにより密度分布の詳細な計測を行なう。現象は三次元空間の中で進行するが、磁場方向の一様性が確保できれば二次元の容器断面内の分布に全てが集約される。まず、プラズマを閉じ込めて初期状態から所定の時間を経過させた後に、電子源と反対側のポテンシャル障壁を瞬間的に外して、電子プラズマを磁力線に沿って取り出す。この電子プラズマを加速して蛍光面へと衝突させることにより、磁力線方向に積分された電子密度の断面方向の分布を発光強度の分布へと変換し、高感度の天体観測用の Charge-Coupled-Device (CCD) カメラによりその発光強度分布を観測する。この方法では詳細な密度分布の情報を得られるが、プラズマは完全に破壊される。そのため、密度分布の時間発展を計測するのに、プラズマの保持時間を少しずつ変えながら実験を何度も繰り返す必要があり、高度な再現性が要求される。

3 BGVD による結晶配位形成機構

3.1 BGVD 中の渦糸の結晶化

渦の結晶状態形成は、渦ダイナミクスの中で最も興味深い観測結果の一つである。前述の様に、この渦の結晶状態形成は Fine らによって、非中性電子プラズマにおいて初めて実現された [30]。円周方向への回転角速度が半径方向に極大値を持つと、その両側にあるズレを持つ流れの間に集団的相互作用が生じて、渦度のリング分布は振動を始める。これは流体力学では Kelvin-Helmholtz 不安定と呼ばれ、非中性プラズマ物理学では Diocotron 不安定と呼ばれる現象である。Fine らは、不安定過程を利用して、螺旋状の渦度の初期分布が分裂して渦糸が形成される過程を利用している。

渦糸の形成に不安定過程を利用する代わりに、我々は渦糸の循環や位置及び本数も明確にして、ダイナミクスを調査してきた。図 3 は真空中の 19 本の渦糸から始まる渦度分布の時間発展を表す。渦は不規則に運動し、断続的な合体を繰り返す。合体によって数を減らした渦糸は結晶の規則的配列を形成する。緩和の過程で、比較的弱い渦糸が薄いシートに壊れ、近くにきた強い渦糸に巻き込まれる。シートのかげらの幾つかは吸収されず、凹凸のある背景渦度分布 (Background vorticity distribution: BGVD) を形成する。自発的に形成された背景渦度は、生き残った渦糸間の相互作用に強く影響する [30, 38]。

結晶構造形成における BGVD の寄与を詳しく調べる為、本稿では、二次元結晶構造の単位セルを形成する最小要素である三本の渦糸のダイナミクスに焦点を当てる。初めに、背景渦度の存在によって、渦糸が対称配位に誘導され、正三角形配位を形成する実験結果について報告する [41]。渦結晶状態形成には、個々の渦糸の移流運動の減少が必要である。三角形の頂点にある個々の渦糸の熱速度ゆらぎの強度を評価する。さらに、電場の微細構造による速度のゆらぎと、幾何学的なパラメータであるシンメトリーパラメータに関連づけを行う [42]。

図 4 で (a) 真空中と (b) BGVD 中の三本の渦糸の時間変化を比較する。初期状態で渦糸は等しい循環 $\Gamma_c = \iint dx dy \zeta_c(x, y) = e N_c / \epsilon_0 B_0 L = 1.64 \times 10^{-6} N_c$ を持ち、一直線に並んでいる。 N_c は

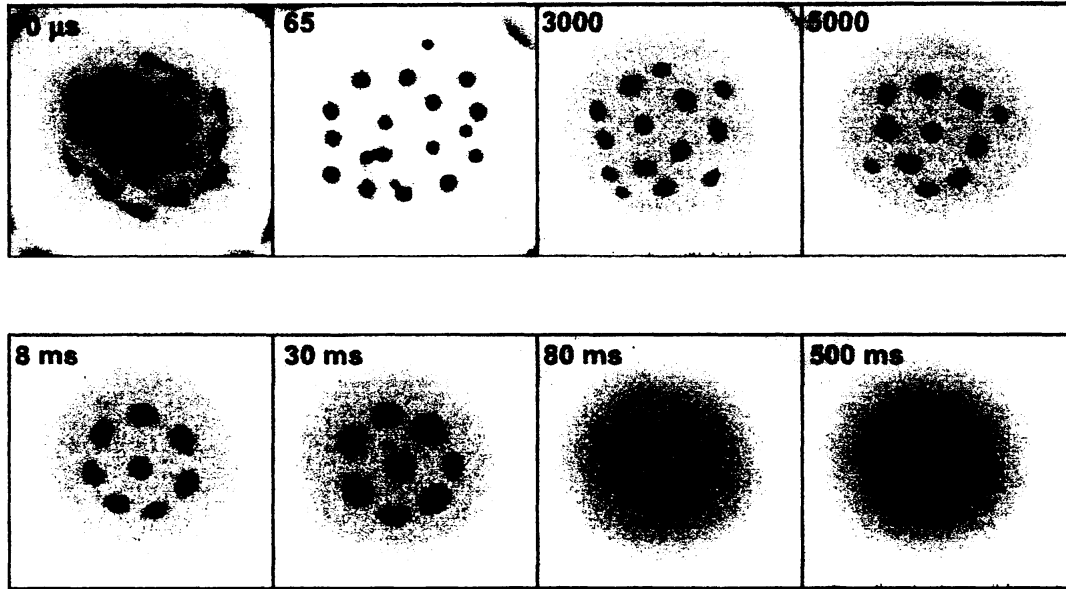


図 3: 真空中に 19 本渦糸を入射した場合の時間発展.

長さ L の個々の渦糸を構成する電子の総数である. 渦糸は $10\mu\text{sec}$ に入射され, $18\mu\text{sec}$ にカソードから切り離されて, 自由に動き出す. 計測時間は左上に示されている. 真空中では, 渦糸は定常的な構造を示す事なく, $\tau_R \approx 50\mu\text{sec}$ の周期で軌道運動を続ける [35]. 1sec のタイムスケールでは, 残留中性粒子との衝突が電子渦糸のダイナミクスに粘性として働く. $t > 100\text{ms}$ のタイムレンジでは, 残留ガスとの衝突か, 壁への衝突によって, 渦糸の数が減る傾向にある.

しかし, 図 4(b) に示されるように, BGVD が存在すると, 渦糸の運動は限られた領域に留まり, その相対位置関係が秩序構造を作るに至る. 初期の BGVD は最大渦度 $\zeta_b = \zeta_{c0}/60$, 循環 $\Gamma_b/\Gamma_c = 12.7$ をもつ連続的な分布である. 最初に, 渦糸は $\tau_R \approx 25\mu\text{sec}$ で軌道運動を行う. ($t = 75, 150\mu\text{s}$) 渦糸周りの回転のズレ (differential rotation) により, BGVD 中に微細構造が作られる. 背景渦度の揺動の最大レベルは $|\delta\zeta_b/\zeta_b| = |\delta n_b/n_b| = 0.49$ である. 渦糸周りの摂動渦度は, 後に ring hole 構造を形成する.

発展の後期では, 渦糸は対称配位に落ち着き, 0.15mm 以下の微視構造に関しては粗視化の避けられない観測では, BGVD は滑らかになる. ($t = 5, 10\text{ms}$) 真空中では, この様な対称配位は, 同じ循環を持つ三本の渦糸が, 正三角形の頂点に置かれた時にのみ形成される. しかし, BGVD 中と異なり, 正三角形配位は長時間維持されない.

3.2 対称性の定量化

対称構造の形成を定量的に解析する為, symmetry parameter

$$S = 12\sqrt{3}\frac{A}{l^2}. \quad (2)$$

を導入する [41]. ここで, A は渦糸を頂点とした三角形の面積であり, l は周辺長である. S は, 三本の渦糸が正三角形配位になった時, 最大値 1 をとる.

図 5(a) にあるような, 様々な形状の BGVD の初期分布について 3 本の渦糸のダイナミクスを調べる. 初期状態において, 3 本の渦糸は一直線に配置され, 各循環は等しく $\Gamma_c \propto N_c/10^7 = 0.74$ である. 図 4(b) に $1 - S$ の時間発展を示す. $1 - S$ は直線配列で 1, 正三角形になると 0 となる. 図 5(a) と (b) のシンボルはお互い対応している. 図 4(b) には, $N_b/10^7 = 0.25$ (∇) and 0 (\times) (す

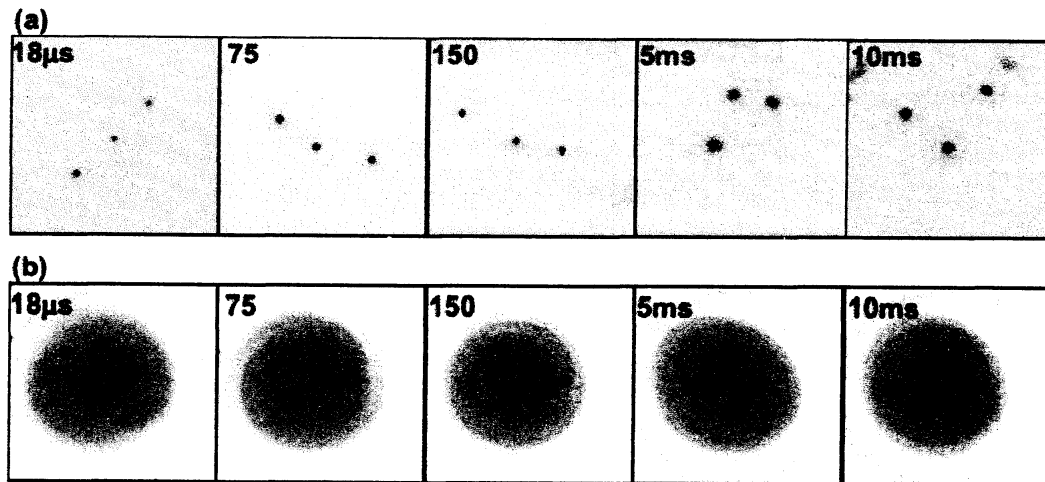


図 4: (a) 真空中と (b)BGVD 中の三本の渦糸の時間変化.

なわち真空) の二つのシンボルが加わっている. ∇ の密度分布は観測の下限界に近く, 決定できない. 但し, N_b は計測可能である.

100 μ s 以内の初期段階では, 全てのケースにおいて $1-S$ は急激に減る傾向を示す. 渦糸は BGVD の存在によって真空の場合から若干修正された軌道運動を行う. 次の段階では, $1-S$ に減衰振動が現れる. $1-S$ の振動数とその振動の減衰率は BGVD に依存する. 真空中の場合 (\times), $1-S$ は減衰しない振動を $\sim 10^5 \mu$ s まで, 渦糸の一つが消えて S が定義出来なくなるまで続ける. 低レベルの BGVD が加わると, 渦糸の移動は減り, 1ms のタイムスケールで $1-S$ の振動は減衰する. これらの特性は, BGVD のレベルが高くなるとより明確に現れる. BGVD が極めて低い $N_b/10^7 = 0.25$ (∇) のケースでは真空の場合との差が不明瞭になる. つまり $N_b/10^7 > 0.25$ において BGVD の効果が出現すると解釈できる. 第三の段階 $t \geq 10$ ms では, $1-S$ は 10^{-2} 以下に低下し, 強い振動は見られない. 最終段階の 100ms 以降は, 正三角形の配置の渦糸が観測される.

3.3 結晶化の速度の定量化

各渦糸の相対位置関係の時間変化を生じる速度を, ここで仮に渦糸の熱速度と定義する. 平行移動や回転移動があったとしても, 相対位置が一定に維持されれば熱速度は 0 であると考ええる. 渦結晶は渦糸の熱速度が 0 の状態に対応し, このような状態に至る過程を「渦糸の冷却」と呼ぶ. Fine らは平均の渦糸熱速度が $|\delta v| \propto t^{-\alpha}$ ($\alpha = 0.5 - 0.6$) のべき依存性で減少すると観測した [30]. Schecter らは数値シミュレーションに基づき, α は Γ_b/Γ_{tot} に依存して, $-0.2 \sim 0.6$ であると評価した [38].

我々の観測したデータについて述べると, 図 5(b) から $1-S \propto t^{-\beta}$ と fitting することによって, 対称化の指数 β を評価できる. 初期振動の消える $t \geq 200 \mu$ s のデータから値を求めると, $\beta = 0.05 \pm 0.21$ (∇), 0.81 ± 0.28 (Δ), 0.66 ± 0.28 (\blacklozenge), 0.82 ± 0.22 (\square), 0.78 ± 0.21 (\circ) と評価できる. $t > 10^4 \mu$ s に限定すると, β はほぼ 1 となる.

ここで, 三角形の頂点にある個々の渦糸の熱速度の大きさを, 我々のデータについて実際に評価してみる. 速度 v_i は計測された密度分布 $n(x, y)$ から求めたポテンシャル分布 $\phi(x, y)$ から計算する. Fine や Schecter の評価法にそのまま従うと, M 個の渦糸の速度ゆらぎの強度は

$$\delta v_{rigid} = \left(\sum_{i=1}^M \delta v_i^2 / M \right)^{1/2} \quad (3)$$

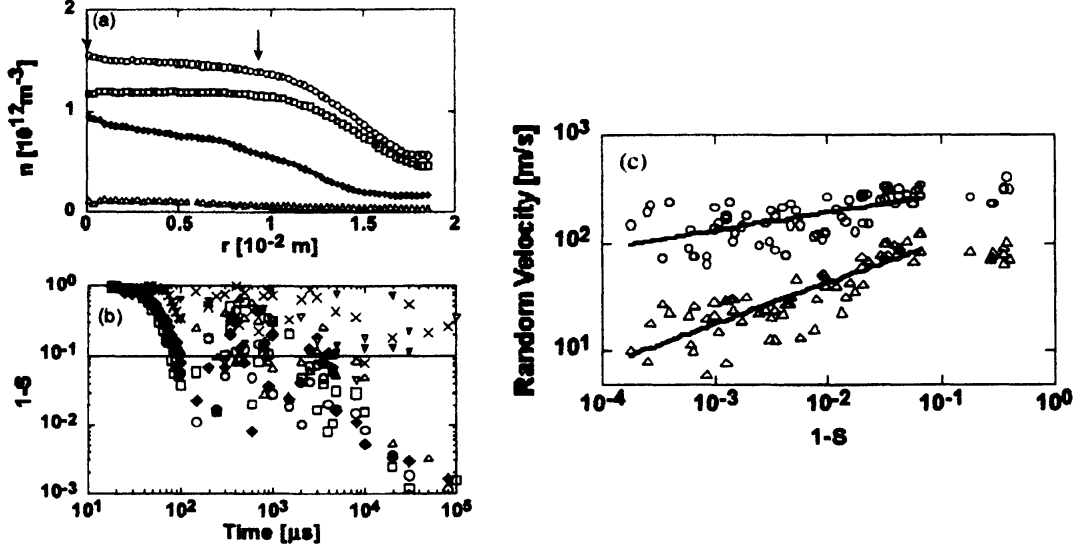


図 5: (a) 初期背景渦の半径方向密度分布 $n_b(x, y) = \epsilon_0 B_0 \zeta_b(x, y)/e$ を示す。背景渦の総電子数は $N_b/10^7 = 0.52(\triangle)$, $9.4(\blacklozenge)$, $21.0(\square)$, $24.8(\circ)$ である。矢印は渦糸の初期入射位置を示している。(b) 対称配位からのずれ $1-S$ を時間の関数としてプロットしたもの。シンボルは (a) における背景渦度分布と一致する。▽と×はそれぞれ $N_b/10^7 = 0.25$ と 0 の場合を表す。(c) $t \geq 1000 \mu\text{s}$ のデータについて、 $|\delta v_{\text{rigid}}|$ (\circ) と δv_{free} (\triangle) を $1-S$ に対してプロットしたもの。 $|\delta v_{\text{rigid}}| = (1-S)^\eta$ ($\eta = 0.166 \pm 0.043$) と $\delta v_{\text{free}} = (1-S)^\lambda$ ($\lambda = 0.30 \pm 0.06$) という関係が実験的に導かれる。

と定義される [38]。ここで、 $\delta v_i = v_i - r_i \bar{\Omega}(t) \hat{\theta}$ は、全渦糸について平均した角速度 (radial-weighted average rotation) $\bar{\Omega}(t) = \sum_{i=1}^M v_{i,\theta} / \sum_{i=1}^M r_i$ に固定した回転系における速度であり、剛体回転からのずれを表す。 r_i と v_i は渦度の中心を原点として測られている。このようにして求めた δv_{rigid} は $\alpha = 0.3 \pm 0.2$ で $\delta v_{\text{rigid}} \propto t^{-\alpha}$ で減少する結果となった。

しかし、 $\tau_R \approx 25 \mu\text{sec}$ を考慮すると、ここで導出された値は大きい。これは渦糸の数が少ない為、渦糸が剛体回転を行うと考えることができないことを意味している。 Γ_c/Γ_b の比が小さいので、BGVD の寄与の方が優勢であって、渦糸の配位だけではシステムの回転が決まらない。このため、三本の渦糸は相対位置を変えなくても、全体として BGVD に対して相対運動を行うと考える。自由に動きまわる三角形の歪みの速度として、新たに渦糸の相対速度のズレを定量化する指標として、

$$\delta v_{\text{free}} = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)}. \quad (4)$$

を定義する [42]。ここで、

$$\delta_1 = |\mathbf{r}_{2'3'}| - |\mathbf{r}_{23}| = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) \Delta t, \quad (5)$$

$$\delta_2 = |\mathbf{r}_{3'1'}| - |\mathbf{r}_{31}| = \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \Delta t, \quad (6)$$

$$\delta_3 = |\mathbf{r}_{1'2'}| - |\mathbf{r}_{12}| = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \Delta t \quad (7)$$

は Δt の間における渦糸の相対位置の時間変化を表す。実際には Δt は相殺して評価には現れない。各時間における δv_{free} を計算すると、 δv_{free} は $\gamma = 0.46 \pm 0.22$ で $\delta v_{\text{free}} \propto t^{-\gamma}$ で減少していた。求められた δv_{free} の値は小さく、 δv_{rigid} に比べて、実験面からはより適当であると考えられる。

図 5(c) では、 \blacklozenge ($N_b/10^7 = 9.4$) に良く似たデータについて、 $\delta v_{rigid}(\bigcirc)$ と $\delta v_{free}(\triangle)$ を $1-S$ と直接比較している。 $|\delta v_{rigid}| = (1-S)^\eta$ と $\delta v_{free} = (1-S)^\lambda$ という相関が見てとれ、さらに線形関係 $\alpha = \eta\beta$ ($\eta = 0.166 \pm 0.043$), $\gamma = \lambda\beta$ ($\lambda = 0.300 \pm 0.06$) がそれぞれ得られる。 fitting line を引く際に、 $1-S > 0.1$ の点は、渦糸冷却のモデルにはまだ適合していないと考えて除外した。 他のケースにこの方法を適用すると $\eta = 0.239 \pm 0.062$ (\triangle), 0.198 ± 0.055 (\blacklozenge), 0.189 ± 0.041 (\square), 0.182 ± 0.059 (\bigcirc) であり、 $\lambda = 0.477 \pm 0.10$ (\triangle), 0.234 ± 0.057 (\blacklozenge), 0.258 ± 0.066 (\square), 0.224 ± 0.064 (\bigcirc) となる。 δv_{free} は $1-S$ に対して、 δv_{rigid} より強い相関を持っている。 この結果は、三角形構造が全渦糸として剛体回転をしていないという観測面からの解釈を支持するものである。

BGVD 中の微細構造による渦糸のランダムな運動 δv を幾何学的なパラメータである S に関連づけられるという意味で、 $\alpha \sim 0.2\beta$ と $\gamma \sim 0.32\beta$ という結果は有用である。 渦糸速度の評価に必要な電場を導出する際の精度が電子密度計測の空間的分解能に厳しく制限されるのに対して、渦糸の位置は巨視的に正確に決定する事が容易である。 δv に対する $1-S$ の役割を断言するには更なる検討が必要であるが、我々の導入したパラメータ S は渦結晶への緩和過程の解析において大変有用であると判断できる。

4 BGVD による結晶配位保持機構

渦糸の対称配位形成は、渦糸周りに渦度の低い ring hole 構造を伴う。 ring hole は、不均一な背景渦の一部が渦糸に掻き回される過程で作られる [43, 44]。 図 6 は、ほぼ同じ初期状態の BGVD に様々な循環比の渦糸を入射した場合に、 $t \geq 5$ ms で観測された準定常状態を示す。 各渦糸の周りに、異なるサイズの ring hole の形成が観測される。 我々の実験結果によれば、BGVD は循環が極端に不均衡な渦糸でも正三角形配位の形成を可能にする。 多数の渦糸が作る渦結晶の形成過程について見ると、ring hole 構造の形成は Fine の実験 [30] と Schecter のシミュレーション [38] でも観測された。 また Jin の統計モデル [37] でも必要とされている。

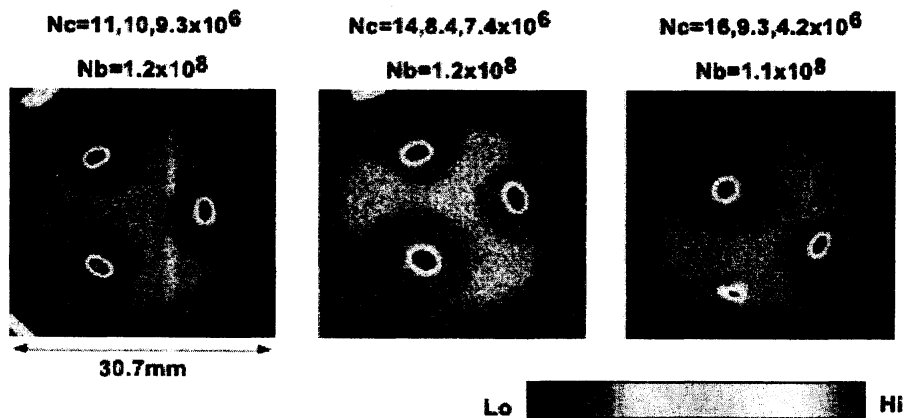


図 6: BGVD 中の三本の渦糸の準定常状態。

図 6 に示された各実験について、ring hole の循環 Γ_h を見積もると、 Γ_c と Γ_h は良い相関があり、 Γ_c が増えるほど Γ_h は増加する。 しかし Γ_h は Γ_c の 20% 以下であり、実効的な循環 $\Gamma_{eff} = \Gamma_c - \Gamma_h \propto (N_c - N_h)/10^6$ は (7.9, 7.5, 8.2 : (a)), (13, 6.1, 6.6 : (b)), (14, 7.3, 6.2 : (c)) である。 Jin の統計モデルでは、渦の結晶化には渦糸の循環が完全にキャンセルされないことが重要であるとされている [37]。

もし実効的な循環が等しいのであれば、図 6(a) で観測された様な対称な分布は三本の渦糸間の力のバランスで理解しうる。 我々は、真空中で循環の等しい三本の渦糸を正三角形の頂点に置いたとき、その配位が長時間維持される事を実験的に確認している。 それに対して、三本の渦糸の循

環が不均衡な場合は、真空中では渦糸は正三角形配位を保つことができなかった。しかし理論的には、BGVDがない時でも、正三角形の頂点に置かれた渦糸は循環の均衡不均衡に関わらず、正三角形配位を保ち続けるという予言がある [35]。

図 7 は不均衡な循環をもつ三本の渦糸の時間発展を (a) 真空中と、(b) BGVD 中で比較している。初期状態で渦糸は不均衡な循環 $\Gamma_{c1}, \Gamma_{c2}, \Gamma_{c3} \propto (N_{c1}, N_{c2}, N_{c3})/10^6 = (16, 9.3, 4.2)$ を持ち、正三角形の頂点に置かれている。真空中では、渦糸は正三角形配位を保ち続けることができず、不規則な運動を示す。一方、BGVD が存在すると渦糸は正三角形配位を保つ。この結果を全て ring hole の機能に帰着させることはできないので、渦糸の正三角形配位を保つ為の BGVD の効能は ring hole 形成以外にも存在すると考えられる。

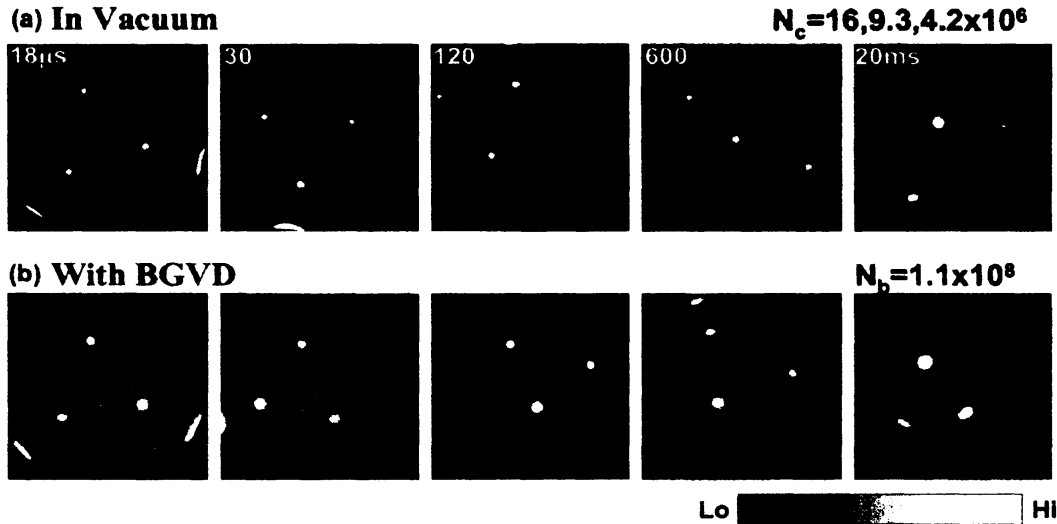


図 7: (a) 真空中と (b) BGVD 中の三本の渦糸の時間変化を示す。初期に於いて三本の渦糸は不均衡な循環を持ち、正三角形の頂点に配置されている。不均衡な循環を持つ渦糸は BGVD が存在する場合しか、正三角形配位を保持できない。

現在まで、渦糸の配列に対する安定性の理論的な解析は、BGVD のない場合について論じているものが殆どである [45, 46]。その枠内においては、渦糸の周りの導体壁は不安定効果を持つという良く知られた予測があり、それは BGVD のない真空中において二本の渦糸の運動の実験で確認されている [15]。Disk 状の BGVD がその縁に渦糸のイメージと等価な変位を作り、境界壁の様に振る舞うという、興味深い理論的な指摘がある [37]。もしこの効果が強ければ、我々の計測結果とは反対に BGVD は三角形配位を破壊してしまうであろう。これに対して実験サイドから Ito らは、渦糸より広がった BGVD が、渦糸による壁のイメージチャージ分布を遮蔽するか、少なくとも小さくする傾向があると指摘した [47]。もし、個々の渦糸のイメージが不鮮明になるならば、渦糸-壁相互作用は渦糸の位置に対して敏感でなくなり、壁の不安定効果は弱くなるはずである。こちらの考え方は、ここに示した観測事実と良く整合する。

5 まとめ

結晶構造形成への渦糸のダイナミクスの緩和過程に注目して行ってきた、我々の実験結果について報告した。背景渦度分布が渦糸の挙動に強く影響し、結晶化に重要な役割を果たしている。問題を簡単にし、秩序度を定量化する為に、二次元結晶構造の単位セルを形成する最小要素である三本の渦糸のダイナミクスに焦点を当てた。背景渦度の存在によって、渦糸が対称配位に誘導され、正三角形配位を形成することを観測した。秩序化の時間を定量化する為に、シンメトリーパ

ラメータを導入した。渦糸の正三角形は形を保持しつつ渦系の中で相対運動をすると考え、三角形の変形速度として、熱速度を評価した。この解析から、系全体は剛体回転をしていないという観測面からの解釈を支持する結果を得た。さらに、電場の微細構造による速度のゆらぎが、幾何学的なパラメータであるシンメトリーパラメータに関連づけられることを明らかにした。背景渦度分布が、正三角形の頂点にある渦糸の相対位置を保つ働きがある事を明らかにした。

参考文献

- [1] 毛利明博, プラズマ・核融合学会誌 **77**, 213 (2001).
- [2] D. H. E. Dubin, Phys. Rev. Lett. **66**, 2076 (1991).
- [3] R. W. Gould, *Non-neutral Plasma Physics* III (AIP1999) pp.170.
- [4] F. Anderegg, E. M. Hollmann, and C. F. Driscoll, Phys. Rev. Lett. **81**, 4875 (1998).
- [5] D. H. E. Dubin and T. M. O'Neil, Rev. Mod. Phys. **71**, 87 (1999).
- [6] H. Alfven, Rev. Mod. Phys. **37**, 652 (1965).
- [7] R. H. Levy, Phys. Fluids **11**, 920 (1968).
- [8] R. J. Briggs, J. D. Daugherty and R. H. Levy, Phys. Fluids **13**, 421 (1970).
- [9] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum Press (1974), New York.
- [10] 際本泰士, 日本物理学会誌 **56**, 253 (2001).
- [11] W. T. Kelvin, *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge University Press, Cambridge, 1910).
- [12] J. J. Thomson, *A Treatise on the Motion of Vortex Rings* (Macmillan, London, 1883).
- [13] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [14] 「巽友正：新物理学シリーズ 21-流体力学」(培風館 1982) .
- [15] T. B. Mitchell, C. F. Driscoll and K. S. Fine, Phys. Rev. Lett. **71**, 1371 (1993).
- [16] Y. Kiwamoto, A. Mohri, K. Ito, A. Sanpei and T. Yuyama, *Non-neutral Plasma Physics* III (AIP1999) pp.99.
- [17] Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei, A. Mohri, T. Yuyama and T. Michishita, J. Phys. Soc. Jpn. (Lett.) **68**, 3766 (1999).
- [18] D. L. Eggleston, Phys. Plasmas **1**, 3850 (1994)
- [19] K. S. Fine, C. F. Driscoll, J. H. Malmberg and T. B. Mitchell, Phys. Rev. Lett. **67**, 588 (1991).
- [20] M. V. Melander, N. J. Zabusky and J. C. McWilliams, J. Fluid Mech. **195**, 303 (1988).
- [21] Y. Soga, Y. Kiwamoto, A. Sanpei and J. Aoki, Phys. Plasmas **10**, 3922 (2003).
- [22] Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei and A. Mohri, Phys. Rev. Lett. **85**, 3173 (2000).

- [23] D. A. Schecter and D. H. E. Dubin, Phys. Rev. Lett. **83**, 2191 (1999).
- [24] D. A. Schecter and D. H. E. Dubin, Phys. Fluids. **13**, 1704 (2001).
- [25] X. -P. Huang, K. S. Fine, and C. F. Driscoll, Phys. Rev. Lett. **74**, 4424 (1995).
- [26] J. C. MacWilliams, J. Fluid Mech **146**, 21 (1984).
- [27] R. Benzi, S. Patarnello and P. Santangelo, J. Phys. A **21**, 1221 (1988).
- [28] G. F. Carnevale, J. C. McWilliams, Y. Pomeau, J. B. Weiss and W. R. Young, Phys. Rev. Lett. **66**, 2735 (1991).
- [29] T. Watanabe, T. Iwayama and H. Fujisaka, Phys. Rev. E **57**, 1636 (1998).
- [30] K. S. Fine, A. C. Cass, W. G. Flynn and C. F. Driscoll, Phys. Rev. Lett. **75**, 3277 (1995).
- [31] Y. Kawai, Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei, Y. Soga, J. Aoki, and K. Itoh, J. Phys. Soc. Jpn. **75**, 104502 (2006).
- [32] Y. Yatsuyanagi, Y. Kiwamoto, T. Ebisuzaki, T. Hatori, T. Kato, Phys. Plasmas **10**, 3188 (2003).
- [33] L. Onsager, Nuovo Cinmeto **6**, 276 (1949).
- [34] G. Joyce and D. Montgomery, J. Plasma Phys. **10**, 107 (1973).
- [35] H. Aref, Phys. Fluids. **22**, 393 (1979).
- [36] R. A. Smith and T. M. O'Neil, Phys. Fluids B **2**, 2961 (1990).
- [37] D. Z. Jin and D. H. E. Dubin, Phys. Rev. Lett. **80**, 4434 (1998).
- [38] D. A. Schecter, D. H. E. Dubin, K. S. Fine and C. F. Driscoll, Phys. Fluids. **11**, 905 (1999).
- [39] J. H. Malmberg and J. S. deGrassie, Phys. Rev. Lett. **35**, 577 (1975).
- [40] A. Mohri, H. Higaki, H. Tanaka, *et al.*, Jpn. J. Appl. Phys. **37**, 664 (1998).
- [41] A. Sanpei, Y. Kiwamoto, K. Ito, Y. Soga, Phys. Rev. E. **68**, 016404 (2003).
- [42] A. Sanpei, K. Ito, Y. Soga, J. Aoki and Y. Kiwamoto, Hyperfine Interactions **174**, 71 (2007).
- [43] A. Sanpei, Y. Kiwamoto and K. Ito, J. Phys. Soc. Jpn. (Lett.) **70**, 2813 (2001).
- [44] D. Durkin and J. Fajans, Phys. Rev. Lett. **85**, 4052 (2000).
- [45] I. M. Lansky and T. M. O'Neil, Phys. Rev. E **55**, 7010 (1997).
- [46] T. H. Havelock, Philos. Mag. **11**, 617 (1931).
- [47] K. Ito, Y. Kiwamoto and A. Sanpei, Jpn. J. Appl. Phys. **40**, 2258 (2001).